FEUILLES D'EXERCICES D'ALGÈBRE COMMUTATIVE

JOÃO LOURENÇO

1.

2.

(1) Déterminez trois nombres réels $a \in \mathbb{R}$, de sorte que le système d'équations linéaires suivant sur $\mathbb{R}$ soit à solution unique, à plusieurs solutions ou sans solution :

$$\begin{array}{rcrcr} ax & + & y & = & 1 \\ 4x & + & ay & = & 2 \end{array}$$

(2) Considérons le système d'équations suivant :

$$\begin{array}{rcrcrcr} 6x & + & 5y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & 4 \\ 2x & - & 2y & - & 2z & = & 8. \end{array}$$

Résolvez le système d'équations. Comment sont situés les trois plans dans l'espace les uns par rapport aux autres ?

(3) Soit donné le système d'équations linéaires suivant sur les nombres réels $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & 1 \\ 2x & + & y & = & 7 \end{array}$$

(a) Résolvez le système d'équations par le calcul.
(b) Résolvez le système d'équations graphiquement, en considérant chaque équation séparément.

(4) Résolvez à l'aide de l'algorithme de Gauss le système d'équations linéaires suivant sur les réels $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 7 \\ 3x_1 & + & 9x_2 & + & 10x_3 & = & 11 \\ 2x_1 & + & 9x_2 & + & 12x_3 & = & 10 \end{array}$$

(5) Les vecteurs suivants engendrent-ils l'espace vectoriel $\mathbb{Q}^3$?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(6) Dans le groupe $G = \mathbb{Z}^{\oplus 2}$, considérons le sous-groupe H engendré par $(-5, 1)$ et $(1, -5)$. Montrez que G/H est cyclique. À quel groupe cyclique standard est-il isomorphe ?

(7) Dans le groupe $G = \mathbb{Z}^{\oplus 2}$, considérons le sous-groupe H engendré par (a, b) et (c, d).

   (a) Montrez que $\mathbb{Z}^{\oplus 2}/H$ est un groupe fini si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
   (b) Dans chacun des cas suivants, déterminez si G/H est cyclique. S'il est cyclique, déterminez à quel groupe cyclique standard il est isomorphe :
      (i) $(a, b) = (3, 4)$, $(c, d) = (6, 7)$
      (ii) $(a, b) = (3, 4)$, $(c, d) = (5, 7)$

(8) Soient A, B des sous-groupes du groupe abélien C. On définit $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.
   (a) Montrez que $A + B$ est un sous-groupe de C.
   (b) Il existe un homomorphisme naturel $\varphi : A \oplus B \to A + B$, défini par $\varphi(a, b) = a + b$. Montrez que φ est surjectif, et que φ est un isomorphisme si et seulement si $A \cap B = 0$. En général, quel est $\ker(\varphi)$?
   (c) Supposons maintenant que A et B soient tous deux finis. Si $A \cap B$ est non nul, combien d'éléments le sous-groupe $A + B$ possède-t-il ?

(9) (a) Supposons que A soit un groupe abélien. Montrez que l'ensemble $T = \{a \in A \mid \#\langle a \rangle < \infty\}$ est un sous-groupe. On l'appelle le « sous-groupe de torsion » de A.
   (b) Montrez que dans le groupe quotient A/T, tout élément non nul est d'ordre infini. Ainsi A/T est « sans torsion ».
   (c) Soit A un groupe abélien. Expliquez comment définir un sous-groupe H tel que dans le quotient A/H, chaque élément $a + H$ satisfasse $3a + H = 0$. Existe-t-il un plus petit tel sous-groupe ?

(10) Soient A et B des sous-groupes d'un groupe abélien C. Cet exercice étudie le sous-groupe $A + B$ et son quotient $(A + B)/B$.
   (a) Montrez que tout élément de $(A + B)/B$ peut s'écrire sous la forme $a + B$ pour un certain $a \in A$.
   (b) Construisez un homomorphisme surjectif $A \to (A + B)/B$.
   (c) Prouvez qu'il existe un isomorphisme $A/(A \cap B) \to (A + B)/B$.

3.

(1) Calculez le déterminant des matrices suivantes:
   (a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$
   (b)
$$B = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & (x_2 + \cdots + x_n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & (x_1 + \cdots + x_{n-1})^{n-1} \end{pmatrix}$$
   (c)
$$C = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_2 \dots x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_1 \dots x_{n-1} \end{pmatrix}$$

(2) Calculez le polynôme caractéristique de la matrice compagnon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

(3) Calculez le déterminant de la matrice tridiagonale

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{n-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & -1 & a_n \end{pmatrix}$$

(4) Prouvez que pour $n \geq 3$, les termes dans le développement d'un déterminant d'ordre n ne peuvent pas être tous positifs.

(5) (a) Existe-t-il des matrices réelles A et B telles que $AB - BA = I$?
 (b) Prouvez que si $AB - BA = A$ avec matrices réelles, alors $\det(A) = 0$.

(6) Trouvez les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $A = (a_{ij})$, où $a_{ij} = \lambda_i/\lambda_j$.

(7) Prouvez que les valeurs propres d'une matrice dépendent continûment de ses éléments.

(8) La somme des éléments de chaque ligne d'une matrice inversible A est égale à s. Prouvez que la somme des éléments de chaque ligne de A^{-1} est égale à $1/s$.

(9) Soit $f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, où A est une matrice d'ordre n. Prouvez que $f'(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \det(\lambda I - A_i)$, où A_i est la matrice obtenue à partir de A en supprimant la i-ème ligne et la i-ème colonne.

4.

(1) Montrer que si un ouvert de $M_n(\mathbb{C})$ contient les matrices diagonales et est stable par similitude, alors il est égal à $M_n(\mathbb{C})$ tout entier.

(2) Montrer que sur un corps algébriquement clos, deux matrices A et B sont semblables si et seulement si, pour tout $\lambda \in K$, chaque puissance de $A - \lambda I$ et de $B - \lambda I$ ont le même rang.

(3) Soit A une matrice vérifiant $(A - I)^2(A - 2I) = 0$. Calculer e^A sous la forme d'un polynôme en A.

(4) Montrer que l'application $A \to Ae^A$ est surjective sur $\mathbb{C}$.

(5) Soit u un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$, dont les valeurs propres sont 0 et 1 ; on note K_0^i (resp. K_1^i) le noyau de u^i (resp. $(u - I)^i$) et soit d_0^i (resp. d_1^i) sa dimension.

On suppose que la suite (d_0^i) (resp. (d_1^i)) est égale à $(4, 7, 9, 10, 10, \dots)$ (resp. $(3, 4, 5, 5, \dots)$). Déterminer alors les invariants de similitudes de u.

(6) Soit u un endomorphisme de $V = K^n$ dont on note χ_u et π_u respectivement les polynômes caractéristique et minimal :
   (a) χ_u est irréductible si et seulement si V n'a pas de sous-espace stable par u ;
   (b) u est cyclique avec π_u une puissance d'un polynôme irréductible si et seulement si V est indécomposable sous u ;

(7) Quels sont les endomorphismes u tels que tout sous-espace stable est de la forme $\mathrm{Ker}(P(u))$ ou $\mathrm{Im}(P(u))$ pour P un polynôme?

(8) Donner la liste de tous les sous-espaces stables d'une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$.

5.

(1) Montrer que les matrices suivantes ne sont pas des carrés dans $M_2(\mathbb{R})$:
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) Soit G un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(K)$. Alors, G est fini si et seulement si G est d'exposant fini si et seulement si l'ensemble des traces des éléments de G est fini.

(3) (a) Montrer qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ a m vecteurs propres linéairement indépendants à valeurs propres réels si et seulement s'il existe une matrice S définie positive de rang m telle que $AS = SA^*$.
   (b) Montrer qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ a m vecteurs propres linéairement indépendants à valeurs propres de norme 1 si et seulement s'il existe une matrice S définie positive de rang m telle que $ASA^* = S$.

(4) Soient $\lambda_1, \dots \lambda_n$ les valeurs propres d'une matrice complexe $A = (a_{i,j})$. Montrer que A est normale si et seulement si $\sum_{i,j} = |a_{i,j}|^2 = \sum_i |\lambda_i|^2$.

(5) Montrer que A est normale si et seulement si $\mathrm{tr}(AA^*)^2 = \mathrm{tr}(A^2 A^{*2})$.

(6) Soit $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tel que $|Ax| \leq |x|$. Prouver que A s'écrit comme la restriction à $\mathbb{R}^n$ d'une transformation orthogonale de $\mathbb{R}^{2n}$.

6.

(1) Donner le centre de $\mathrm{O}(q)$ (resp. Z^+ de $\mathrm{SO}_(q)$) et montrer que $O(q)$ est un produit semi-direct de $\mathrm{SO}(q)$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; a quelle condition ce produit semi-direct peut-il être pris direct ?

(2) Soit $u \in \mathrm{O}(q)$ et $F_u = \{x \in E \colon u(x) = x\}$ et on note $p_u = n - \mathrm{dim} F_u$. Montrer que u est le produit d'exactement p_u réflexions.

(3) Montrer que pour $n \geq 3$, tout élément de $\mathrm{SO}(q)$ est produit d'au plus n renversements.

(4) Montrer que pour tout $u \in \mathrm{O}(q)$, il existe une décomposition orthogonale $E = \ker(u-1) \oplus \ker(u+1) \oplus P_1 \oplus \dots \oplus P_r$ où les P_i sont des plans stables par u, tels que la restriction de u y soit une rotation.

(5) On note H le corps des quaternions et soit G ceux de norme 1, c-à-d : $G = \{a + bi + cj + dk \colon a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$. On considère alors l'action de G sur H par automorphismes intérieurs. En restreignant cette action à l'ensemble P

des quaternions purs, montrer que l'on obtient alors un isomorphisme $G/\{\pm 1\} \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. La suite exacte associée est-elle scindée ?